

MODELAGEM DIFERENCIAL DE PROBLEMAS DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA PELO MÉTODO DE EULER.

Thiago Ceber de Mello, Luis Roberto Almeida Gabriel Filho, Paulo Victor de Souza Aoki, Camila Pires Cremasco Gabriel – Matemática – Ciência da Computação - Docente da Unesp de Tupã, Docente do Departamento de Matemática da FAI - Adamantina / SP.

Nos últimos 20 anos verificou-se acentuado desenvolvimento no campo das equações diferenciais. As equações diferenciais são um importante instrumento para se estudar grande número de fenômenos em que alguma quantidade esteja variando com o tempo ou com qualquer outro tipo de variável independente. O advento dos computadores de alta velocidade tornou viável a resolução de equações por métodos numéricos, resultando em toda uma gama de métodos novos. Os métodos numéricos são processos que fornecem soluções aproximadas em pontos particulares utilizando as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e cálculos funcionais repetidas vezes.

No presente estudo, esperamos obter uma solução aproximada a real em problemas de variação de temperatura em relação ao tempo utilizando-se do método numérico de Euler.

No tratamento matemático do modelo é interessante que os métodos e técnicas matemáticas possam ser freqüentemente interpretados na linguagem do problema original. Em alguns casos esta interpretação é decisiva no auxílio ao desenvolvimento matemático da questão e pode mesmo acontecer que o argumento matemático falte e seja substituído por argumentos mais claros na área do problema original. É óbvio que uma argumentação desta natureza, apesar de sua importância científica, mesmo para a Matemática, não pode ser considerada como argumento estritamente matemático. Este processo de intermediação entre o problema original e o modelo matemático é uma atividade que poderíamos classificar de típica da Matemática Aplicada, exigindo uma avaliação competente da questão sob os dois pontos de vista. Talvez seja esta a atitude mais importante quando se trabalha com modelagem, pois nos fornece a *validade* ou não do modelo.

De acordo com BASSANEZI, denominamos equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem separável equações do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (1),$$

a qual, em forma diferencial, fica:

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (2).$$

Sua solução geral é obtida integrando-se diretamente a equação (2), isto é,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

A lei de Newton afirma que “a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura desse corpo e a do meio ambiente”. Sendo $T(t)$ a temperatura do corpo, T_a a do ambiente e $T_0 = T(0)$, o problema físico dará origem ao seguinte problema matemático:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \lambda(T - T_a) \\ T(0) &= T_0. \end{aligned}$$

Observa-se que:

se $T_0 > T_a$, o corpo se esfriará ($\lambda < 0$),

se $T_0 < T_a$, o corpo se aquecerá ($\lambda > 0$),

se $T_0 = T_a$, o corpo manterá sua temperatura inicial.

A equação diferencial envolvida no problema é separável; logo, podemos resolvê-la obtendo

$$|T - T_a| = e^{\lambda t + C},$$

onde C é a constante de integração e pode ser determinada a partir da condição inicial do tipo

$$y(x_0) = y(y_0).$$

- Se $T > T_a$, temos

$$T(t) = T_a + e^{\lambda t + C} \quad (3).$$

- Se $T < T_a$, temos

$$T(t) = T_a - e^{\lambda t + C} \quad (4).$$

- Se $T = T_a$, $T(t) = T_a$ será uma função constante que será a solução da Equação Diferencial.

Impondo que $T(0) = T_0$ em (3) e (4), temos:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\lambda t} \quad (3)',$$

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\lambda t} \quad (4)'.$$

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial juntamente com condições subsidiárias relativas à função incógnita e suas derivadas, todas dadas para um mesmo valor da variável independente (BRONSON).

Uma solução de um problema de valor inicial, ou de valores no contorno, é uma função $y(x)$ que satisfaz não só a equação diferencial dada mas também a todas as condições subsidiárias. Um método numérico para resolver um problema de valor inicial é um processo que fornece soluções aproximadas em pontos particulares utilizando as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e cálculos funcionais.

Todos os métodos numéricos envolvem a determinação de soluções aproximadas em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, onde a diferença entre dois valores sucessivos quaisquer de x é uma constante h , da forma $h = x_{n+1} - x_n$, com $n = 0, 1, 2, \dots$, sendo que o valor h é escolhido arbitrariamente. Em geral, quanto menor h melhor a aproximação obtida na solução.

Para o método numérico de Euler, estudam-se problemas de valor inicial de primeira ordem da forma $y' = f(x, y)$, com $y(x_0) = y_0$. A solução aproximada no ponto x_n será designada por $y(x_n)$, ou simplesmente y_n . Conhecido y_n , determinaremos y'_n através da relação $y' = f(x_n, y_n)$. Deste modo o método de Euler consiste em fazermos: $y_{n+1} = y_n + hy'_n$ ou $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Problema: Coloca-se uma barra de metal, à temperatura de 100°C em um quarto com temperatura constante de 0 °C. Se após 20 minutos a temperatura da barra é de 50°C, determine a temperatura da barra após 10 minutos

Resolução

Nota-se que $T < T_a$, logo temos que $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\lambda t}$.

Como $T_a = 0^\circ \text{C}$, $T_0 = 100^\circ \text{C}$, temos:

$$T(t) = 0 + (100 - 0)e^{-\lambda t} \Rightarrow T(t) = 100e^{-\lambda t} \quad (5)$$

Para $t = 20$, sabemos que $T(20) = 50$; logo, de (5)

$$50 = 100e^{-20\lambda} \text{ onde } \lambda = \frac{-1}{20} \ln \frac{50}{100} = \frac{-1}{20} (-0,693) = 0,035$$

Levando este valor a (5), obtivemos a temperatura da barra no tempo arbitrário t :

$$T(t) = 100e^{-0,035t} \quad (6)$$

Desejamos $T(t)$ quando $t = 10$. Fazendo $t = 10$ em (6), obtivemos:

$$T(t) = 100e^{(-0,0035)(10)} = 100(0,705) = 70,5^\circ \text{C}$$

- Agora o problema será resolvido utilizando o método de Euler.

A equação diferencial do problema proposto de variação de temperatura é dado por

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_a) \quad (-\lambda \text{ pois } T_0 > T_a),$$

podendo ser escrita também na forma:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = +\lambda T_a.$$

Seja, $T = y$, $\lambda = a$ e $\lambda T_a = b$, temos que:

$$y' + ay = b$$

$$y' = b - ay$$

$$y'_n = b - ay_n \quad (7)$$

O Método de Euler consiste na aplicação da seguinte formula:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

Aplicando (7) no Método de Euler temos;

$$y_{n+1} = y_n + h(b - ay_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hb - hay_n$$

$$y_{n+1} = hb + (1 - ha)y_n$$

O resultado obtido utilizando-se um passo $h = 0,1$ pode ser visualizado na tabela abaixo, lembrando que a tabela esta simplificada para melhor visualização.

t	y_n	Solução Verdadeira: $T(t) = 100e^{-0,035t}$	Erro
	$h = 0,1$		$h = 0,1$
0	100	100	0
1	96,555	96,561	0,006
2	93,228	93,239	0,011
3	90,016	90,032	0,017
4	86,914	86,936	0,021
5	83,920	83,946	0,026
6	81,029	81,058	0,030
7	78,237	78,270	0,034
8	75,541	75,578	0,037
9	72,939	72,979	0,040
10	70,426	70,469	0,043
11	67,999	68,045	0,046
12	65,656	65,705	0,048
13	63,394	63,445	0,051
14	61,210	61,263	0,053
15	59,101	59,156	0,054
16	57,065	57,121	0,056
17	55,099	55,156	0,058
18	53,200	53,259	0,059
19	51,367	51,427	0,060
20	49,598	49,659	0,061
Erro médio			0,044

Tabela 1: Tabela com os valores obtidos Discretamente com $h = 0,1$ e continuamente, com os respectivos erros e erro médio

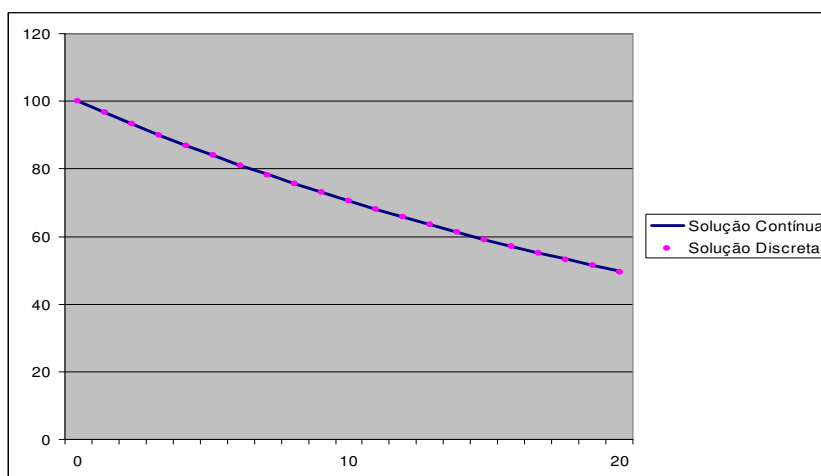


Figura1: Gráfico da Solução Tradicional (Contínua) e da Solução Discreta com $h = 0,1$

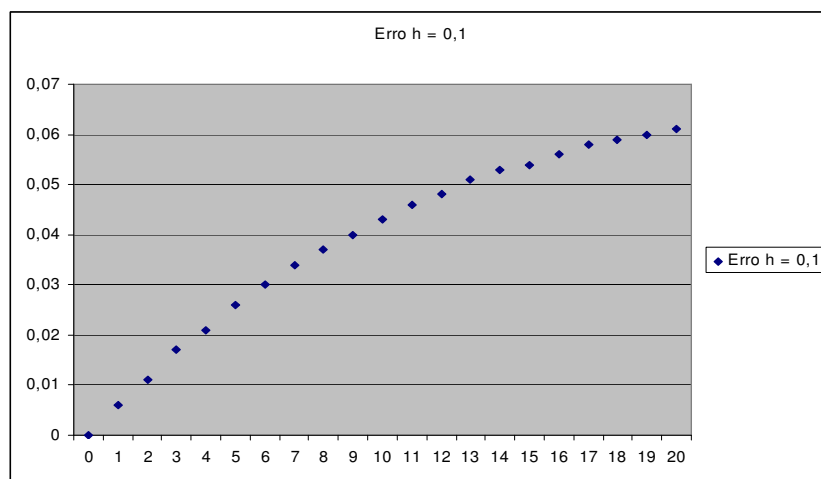


Figura2: Gráfico do Erro da aproximação pelo Método de Euler com $h = 0,1$

O sistema discreto utilizado foi satisfatório no problema de variação de temperatura. A solução do problema pelo método tradicional contínuo foi realizada para avaliar a precisão da solução numérica a qual foi utilizado o passo com $h = 0,1$. Pode-se notar que conforme aumenta o tempo, o Método vai perdendo sua precisão. Para grandes intervalos de tempos deve-se utilizar um passo menor que garantirá uma maior precisão.

BIBLIOGRAFIA

- BASSANEZI, R. C. Equações diferenciais com aplicações. São Paulo: Harbra, 1988. 572p.
- BRONSON, R. Moderna Introdução às Equações Diferenciais. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 387p.
- LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002.